graded Bourbaki ideals of graded modules

神代　真也

小山高専

j.w.w. **J. Herzog** and **D. I. Stamate**

オンライン可換環論セミナー 2021

2021 年 6 月 26 日

to appear Math. Z. (published online first)

Introduction

Fact

R を Noether 正規整域, M を階数 $r > 0$ の torsionfree R-加群とする. このとき,

$$\exists 0 \to R^{r-1} \to M \to I \to 0,$$

ただし I はイデアル.

Introduction

Philosophy

加群 M の情報はブルバキイデアル I に遺伝する

（例）

- cohomology の消滅問題
- hypersurface 環上の MCM 加群解析
- 加群の Rees 代数
- Hilbert-Samuel 関数解析
- $\cdots$

Introduction

Observation

$R = K[X, Y, Z]$, $M = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -Z \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -Z \\ 0 \\ X \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -Y \\ X \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq R^3$ とする．
M は階数 2 の torsionfree R-加群である．このとき，

$$0 \to R \longrightarrow M \to (Y, Z) \to 0,$$

$$0 \to R \longrightarrow M \to (X, Z) \to 0$$

である．

Introduction

Question

- どうやってブルバキ完全列を構成するか
- ブルバキ完全列はどれだけあるのか
- ブルバキイデアルはどうやって構成するのか

以下, 常に R は Noether 正規整域,
M は階数 $r > 0$ の（有限生成）R-加群とする.

Introduction

Question

- どうやってブルバキ完全列を構成するか
- ブルバキ完全列はどれだけあるのか
- ブルバキイデアルはどうやって構成するのか

以下, 常に R は Noether 正規整域,
M は階数 $r > 0$ の（有限生成）R-加群とする.

ブルバキ完全列の構成

ブルバキ完全列の構成

Lemma

次が正しい.

- M は torsionfree 加群である $\Leftrightarrow \exists 0 \to M \to F$.
- M は reflexive 加群である $\Leftrightarrow \exists 0 \to M \to F \to G$.

ブルバキ完全列の構成

Theorem

M を reflexive R-加群として短完全列

$$0 \to M \xrightarrow{\iota} F \to G$$

を 1 つ固定する．このとき勝手な $\varphi : R^{r-1} \to M$ に対して次が同値:

- $0 \to R^{r-1} \xrightarrow{\varphi} M \to \mathrm{Coker}\varphi \to 0$ がブルバキ完全列
- $\mathrm{ht}_R(I_{r-1}(\iota \circ \varphi)) \geq 2.$

ブルバキ完全列の構成

Example

$R = K[X, Y, Z]$, $M = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -Z \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -Z \\ 0 \\ X \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -Y \\ X \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq R^3$ とする.
$M = \Omega_R^2(K)$ より, M は reflexive である.
$\varphi : R \to M; 1 \mapsto f \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -Z \\ Y \end{pmatrix} + g \cdot \begin{pmatrix} -Z \\ 0 \\ X \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} -Y \\ X \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると,

$$\iota \circ \varphi : R \to M \to R^3; 1 \mapsto \begin{pmatrix} -Zg - Yh \\ -Zf + Zh \\ Yf + Zg \end{pmatrix}.$$

従って,

$$\begin{aligned} & 0 \to R^{r-1} \xrightarrow{\varphi} M \to \mathrm{Coker}\varphi \to 0 \text{ がブルバキ完全列} \\ \Leftrightarrow \quad & \mathrm{ht}_R I_1 \begin{pmatrix} -Zg - Yh \\ -Zf + Zh \\ Yf + Zg \end{pmatrix} \geq 2. \end{aligned}$$

ブルバキ完全列の構成

Example 続き

$\mathrm{ht}_R I_1 \begin{pmatrix} -Zg-Yh \\ -Zf+Zh \\ Yf+Zg \end{pmatrix} \geq 2$ かどうか.

Yes: $(f, g, h) = (1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$...
No: $(f, g, h) = (X, 0, 0), (Z, 1, 1)$...

ブルバキ完全列の遍在性

ブルバキ完全列の遍在性

Fact (ブルバキの定理の次数付版)

$R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ を次元が 2 以上の standard graded Noerther 正規整域で R_0 が無限体であるものとする.
M を階数 $r > 0$ の graded torsionfree R-加群,
$k \geq$ "M の次数付生成系の degree の中で最大のもの"
とする. このとき

$$\exists 0 \to R(-k)^{r-1} \to M \to I(m) \to 0,$$

ただし I はイデアル, m は整数.

ブルバキ完全列の遍在性

Fact の仮定のもとで, 任意の次数付 R-linear map $\varphi : R(-k)^{r-1} \to M$ に対して,

$$\begin{tikzcd} & G = R(-k)^{\alpha} \arrow[d, "\pi"] \\ & M_{\geq k} \arrow[d, "\iota"] \\ F = R(-k)^{r-1} \arrow[uur, dotted, "\exists A_\lambda"] \arrow[r, "\forall \varphi"] & M \end{tikzcd}$$

である. この記号のもと, 次が成り立つ.

ブルバキ完全列の遍在性

Theorem

Fact の仮定に加えて, R が CM 環で, かつ R_0 が代数閉体であるとする．また M も reflexive とする．このとき,

$$\left\{ A_\lambda \in K^{\alpha\times(r-1)} : \begin{array}{c} 0 \to F \xrightarrow{\iota\circ\pi\circ A_\lambda} M \to \mathrm{Coker} \to 0 \\ \text{is a Bourbaki sequence} \end{array} \right\}$$

は空でない $K^{\alpha\times(r-1)}$ の部分開集合である.

ブルバキ完全列の遍在性

Example

$R = K[X, Y, Z]$ with $\deg X = \deg Y = \deg Z = 1$, $M = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -Z \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -Z \\ 0 \\ X \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -Y \\ X \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq R^3$ とする．M は 2 次の元で生成されている．

$$\varphi_{(a,b,c)} : R(-2) \to M; 1 \mapsto a\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -Z \\ Y \end{pmatrix} + b\cdot \begin{pmatrix} -Z \\ 0 \\ X \end{pmatrix} + c\cdot \begin{pmatrix} -Y \\ X \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおく $(a, b, c \in K)$．このとき

$$\left\{ (a, b, c) \in K^3 : \underset{\text{is a Bourbaki sequence}}{0 \to F \xrightarrow{\varphi_{(a,b,c)}} M \to \mathrm{Coker} \to 0} \right\} = K^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

ブルバキイデアルの構成

ブルバキイデアルの構成

Remark

$$\begin{tikzcd}
 & & F_1 \arrow[d, "\partial_1"] & & \\
 & & F_2 \arrow[d, "\partial_0"] & & \\
0 \arrow[r] & R^{r-1} \arrow[r, "\varphi"'] & M \arrow[r] \arrow[d] & I \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow F_1 \oplus R^{r-1} \xrightarrow{(\partial_1 \ \ \varphi)^T} F_0 \to I \to 0.$$

ブルバキイデアルの構成

Theorem

R: Noetherian factorial domain, I: イデアルとして，

$$R^\beta \xrightarrow{B} R^\alpha \to I \to 0$$

が与えられているとする．このとき任意の階数 $\alpha - 1$ の $\alpha \times (\alpha - 1)$ B 部分行列 C に対して，

$$I = \frac{1}{r} \cdot I_{\alpha-1}(C),$$

ただし $r = \gcd I_{\alpha-1}(C) \in R$.

ブルバキイデアルの構成

Example

$R = K[X, Y, Z]$, $M = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -Z \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -Z \\ 0 \\ X \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -Y \\ X \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq R^3$ とする.
このとき,

$$0 \to R \xrightarrow{\varphi(f,g,h)} M \to I \to 0$$

がブルバキ完全列であるとすると,

$$R^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} X & f \\ -Y & g \\ Z & h \end{pmatrix}} R^3 \to I \to 0.$$

従って, $(f, g, h) = (1, 0, 0)$ ならば $I = (-Y, Z)$,
$(f, g, h) = (0, 1, 0)$ ならば $I = (X, Z)$ となる.

Koszul cylcles のブルバキイデアル

Koszul cylcles のブルバキイデアル

$R = K[X_1, \dots, X_n]$ として,

$$0 \to K_n \xrightarrow{\partial_n} K_{n-1} \to \cdots \xrightarrow{\partial_1} K_0 \to 0$$

を Koszul complex of $X_1, \dots, X_n$ とする.

$$Z_i = \mathrm{Im}\partial_i \ (1 \leq i \leq n)$$

とおく. $Z_1 = (X_1, \dots, X_n)$, $Z_n = R$ に注意する.

Question

$Z_i = \mathrm{Im}\partial_i \ (2 \leq i \leq n-1)$ のブルバキイデアル?

Koszul cylcles のブルバキイデアル

$R = K[X_1, \ldots, X_n]$ として,

$$0 \to K_n \xrightarrow{\partial_n} K_{n-1} \to \cdots \xrightarrow{\partial_1} K_0 \to 0$$

を Koszul complex of $X_1, \ldots, X_n$ とする.

$$Z_i = \mathrm{Im}\partial_i \ (1 \leq i \leq n)$$

とおく. $Z_1 = (X_1, \ldots, X_n)$, $Z_n = R$ に注意する.

Question

$Z_i = \mathrm{Im}\partial_i \ (2 \leq i \leq n-1)$ のブルバキイデアル？

Koszul cylcles のブルバキイデアル

Proposition

- 勝手な $1 \le i < j \le n$ に対して, (X_i, X_j) は Z_{n-1} のブルバキイデアルである.
- $\left(\frac{X_1 \cdots X_n}{X_i X_j} \;\middle|\; (i,j) \in \{(1,2),(2,3),\ldots,(n-1,n),(n,1)\} \right)$ は Z_{n-2} のブルバキイデアルである.

証明の鍵は, Koszul complex の canonical basis の一部をブルバキ完全列を生成するための元として選べることにある. すなわち, multi-graded なブルバキ完全列が存在することによる.

Koszul cylcles のブルバキイデアル

前の Proposition が成り立つ一方で, 次が成り立つ.

Theorem

$i \geq 2$ とする. このとき十分大きい n に対して, $Z_{n-(i+1)}$ および Z_i の multi-graded なブルバキ完全列は存在しない.

Koszul cylcles のブルバキイデアル

Example

$R = K[X_1, \ldots, X_5]$ とすると, Z_2 のブルバキイデアルは

$$
\begin{aligned}
I =& (1/x_2^2 x_3) I_6(C) \\
=& (x_2x_3x_4, x_1x_3x_4 + x_3^2x_4, x_1x_2x_4 + x_1x_4^2 + x_3x_4^2, \\
& x_1x_2x_3 + x_1x_2x_5 + x_1x_4x_5 + x_3x_4x_5, \\
& x_2^2x_4 + x_2x_4^2, x_2^2x_3 + x_2^2x_5 + x_2x_4x_5, x_2x_3^2 + x_2x_3x_5)
\end{aligned}
$$

である. ただし,

$$
C = \begin{pmatrix}
x_1+x_3 & x_4 & x_5 & x_2+x_4 & x_5 & x_3+x_5 \\
-x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -x_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_1 & 0 & -x_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & x_1 & 0 & -x_3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & -x_4
\end{pmatrix}.
$$

ご清聴ありがとうございました